Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 13

27/11/06

Zadanie 1
Wykaż, że miara produktowa Lebesgue'a $\lambda \times \lambda$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest niezmiennicza na translacje τ, tzn., jeśli A jest mierzalny to $\tau(A)$ też jest mierzalny i $(\lambda \times \lambda)(\tau(A)) = (\lambda \times \lambda)(A)$.
Uwaga: Translacja τ o wektor (a, b), to odwzorowanie $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$.
Wsk. Niezmienniczość wystarczy pokazać dla prostokątów mierzalnych (dlaczego).

Zadanie 2
Rozważ funkcję borelowską $f : [0, 1] \to [0, 1]$ oraz podzbiór A kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ określony następująco

$$A = \{(x, y) : y \leq f(x)\}.$$

Udowodnij, że A jest mierzalny względem σ-ciała produktowego borelowskiego oraz, że

$$(\lambda \times \lambda)(A) = \int f \, d\lambda.$$

Wsk. Przybliżać funkcję mierzalną od dołu funkcjami prostymi.

Zadanie 3
Wykaż, że miara produktowa Lebesgue'a $\lambda\times\lambda$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest niezmiennicza na obroty θ, tzn., jeśli A jest mierzalny to $\theta(A)$ też jest mierzalny i $(\lambda \times \lambda)(\theta(A)) = (\lambda \times \lambda)(A)$.
Uwaga: Obrót θ można wyrazić we współrzędnych kartezjańskich jako mnożenie przez macierz obrotu $(x, y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$, albo we współrzędnych biegunowych jako $(\rho, \varphi) \mapsto (\rho, \varphi + \alpha)$, albo na płaszczyźnie zespolonej jako mnożenie przez liczbę zespoloną ξ o module 1, $z \mapsto z\xi$. Jak komu wygodniej.
Wsk. Niezmienniczość wystarczy pokazać dla zwykłych prostokątów $[a, b] \times [c, d]$ (dlaczego). Można przy tym skorzystać z poprzedniego zadania.

Zadanie 4
Rozważ produkt przestrzeni $\mathbb{R}$ z miarą Lebesgue'a i $\mathbb{N}$ z miarą liczącą. Opisz jak wygląda ta przestrzeń, jak wyglądają zbiory mierzalne i jak oblicza się ich miarę produktową.